

**STUDENTSKE PRAKSE MATEMATIČKOG INSTITUTA SANU
2026.**



Razvoj algoritama za probleme optimizacije

Mentori:

Tatjana Davidović, tanjad@mi.sanu.ac.rs

Tatjana Jakšić-Kruger, tatjana@mi.sanu.ac.rs

Dragan Urošević, draganu@mi.sanu.ac.rs

Luka Matijević, luka@mi.sanu.ac.rs Slobodan Jelić, sjelic@grf.bg.ac.rs

Raka Jovanović, rjovanovic@hbku.edu.qa

Dušan Ramljak, dusan@psu.edu

Opis: Ova tema pripada naučnoj disciplini Operaciona istraživanja. Rad bi bio usmeren na razvoj matematičkih modela, egzaktnih i heurističkih metoda optimizacije za različite, akademske i praktične probleme optimizacije (optimizacija na grafovima, raspoređivanje, transport, lokacija, novije varijante problema trgovačkog putnika, itd.). Pored primene različitih egzaktnih metoda opšte namene (npr. CPLEX, Gurobi, LINGO), razvijali bi se egzaktni i heuristički algoritmi specifični za konkretan razmatrani problem. Posebna pažnja bila bi posvećena metaheuristikama, približnim metodama opšte namene koje omogućavaju da se prevaziđu nedostaci egzaktnih metoda, tj. veliki zahtevi za vremenskim i memorijskim resursima. Specijalno bi se promovisale one metaheuristike koje su razvili srpski istraživači: Metoda promenljivih okolina (Variable Neighborhood Search, VNS) i Optimizacija kolonijom pčela (Bee Colony Optimization, BCO). Istraživanja bi takođe bila usmerena ka hibridizaciji metaheuristika sa postojećim i novorazvijenim tehnikama mašinskog učenja. Pored razvoja i implementacije, radilo bi se na paralelizaciji, teorijskoj i empirijskoj analizi metaheuristika. Značajan segment istraživanja u okviru letnje prakse bio bi usmeren na implementaciju optimizacionih metoda za rešavanje problema optimizacije koji se javljaju u nauci i industriji. Kroz taj rad, studentima se omogućuje razvoj i primena veština i tehnika vezanih za programiranje, optimizaciju, teoriju grafova i mašinsko učenje. Zainteresovanim studentima će biti omogućeno da primenjuju tehnike iz nauke o podacima, kao što su vizualizacija, analiza podataka, teorija igara, učenje sa podsticajem (reinforcement learning), udruženo učenje (collaborative learning), sistemi preporuka (recommender systems).

Neophodno predznanje: programerske veštine, C ($C++$), $C\#$, Java, R , Python. Takođe, predlažemo studentima da se upoznaju sa postojećim softverima za pronalaženje optimalnih vrednosti parametara metaheurističkih metoda (npr. *iRace*).

Relevantna literatura:

1 IBM ILOG CPLEX 12.7 Optimization Studio CPLEX User's Manual, 2017.

https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.7.1/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf

2 LINGO - The Modeling Language and Optimizer, LINDO Systems Inc. 2020.

<https://www.lindo.com/downloads/PDF/LINGO.pdf>

- 3 Gurobi Optimizer Reference Manual, Version 9/0, Gurobi Optimization LLC, 2020.
https://www.gurobi.com/wp-content/plugins/hd_documentations/documentation/9.0/refman.pdf
- 4 Woeginger, Gerhard J. “Exact algorithms for NP-hard problems: A survey”. Combinatorial optimization—eureka, you shrink!. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 185–207.
- 5 Talbi, El-Ghazali, Metaheuristics: from design to implementation, John Wiley and Sons, 2009.
- 6 Hansen, Pierre, et al., Variable neighborhood search: basics and variants, EURO Journal on Computational Optimization 5(3):423-454, 2017.
- 7 Davidović, Tatjana, Bee Colony Optimization: Recent Developments and Applications, (plenary talk), Proc. Balkan Conference on Operational Research, BALCOR 2015, Constanta, Romania, Sept. 9-12, 2015. Mircea cel Batran Naval Academy Scientific Bulletin, 18(2):225-235, 2015.
- 8 Manuel López-Ibáñez, Leslie Pérez Cáceres, Jérémie Dubois-Lacoste, Thomas Stützle and Mauro Birattari. The irace Package: User Guide. IRIDIA, CoDE, Université Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium, 2020. <https://cran.r-project.org/web/packages/irace/vignettes/irace-package.pdf> (verzija na srpskom jeziku: <http://www.mi.sanu.ac.rs/~tanjad/UputstvoZaIRace.pdf>)

Polidendriformne algebre na hipergraf-politopima

Mentor: Jovana Obradović, jovana@mi.sanu.ac.rs

Opis: Tema ove studentske prakse nalazi se na preseku algebarske kombinatorike, konveksne geometrije i teorije operada.

Lode i Ronko su 1998. godine uveli važnu Hopfov algebru definisanu na linearnom omotaču ukorenjenih planarnih binarnih drveta, koja je usko povezana sa Malvenuto–Rojtenauerovom Hopfovom algebrom permutacija. Sa geometrijskog stanovišta, planarna binarna drveta i permutacije označavaju temena dve klasične familije politopa: asocijaedara i permutoedara. Kasnije su Lode i Ronko, kao i Burgunder i Ronko, proširili odgovarajuće asocijativne proizvode sa temena na sve strane ovih politopa, označene planarnim drvetima, odnosno surjekcijama.

Preciznije, Lode i Ronko su definisali asocijativni proizvod $*$ na planarnim drvetima kao šafl drveta. Šafl dva drveta T i S definiše se kao formalna suma drveta čiji čvorovi potiču ili iz stabla T , ili iz stabla S , ili nastaju spajanjem čvorova iz oba stabla. Autori su primetili da se ovaj proizvod može rastaviti prema poretku korena rezultujućih stabala, čime se dobijaju tri operacije, obično označene sa “ \prec ”, “ \succ ” and “ \bullet ”, i za koje važi $*$ = (\prec) + (\succ) + (\bullet). Burgunder i Ronko su primenili sličnu ternarnu

dekompoziciju na surjekcije. Takva dekompozicija vodi do algebarske strukture poznate pod nazivom tridendriformna algebra (odnosno, u opštijem slučaju, q -tridendriformna algebra).

Asocijaedri i permutoedri predstavljaju samo posebne primere mnogo šire klase politopa, poznate kao hipergraf-plitopi ili nestoedri, koji se geometrijski dobijaju sukcesivnim odsecanjem strana simpleksa. U svom nedavnom radu, Kirjen, Ivanović i Obradović pokazali su da se strane proizvoljnog hipergraf-politopa mogu opisati pomoću struktura sličnih drvetima, koje se zovu konstrukti. Njihov jezik konstrukata pruža prirodan okvir za uopštavanje klasičnih šaflova drveta i surjekcija na druge familije politopa.

Korak dalje načinili su Kirjen, Delkroa-Ože i Obradović prelaskom na “nepriistrasni” okvir u kojem operacije mogu imati proizvoljan broj argumenata. Tako nastaje nova algebarska struktura, pod nazivom polidendriformna algebra, iz koje se klasične tridendriformne relacije mogu prirodno izvesti.

Tokom prakse student će:

- upoznati strukturne uslove koji omogućavaju proširenje klasičnog šafl proizvoda na različite familije hipergraf-politopa;
- proučavati polidendriformne relacije dobijenih šafl proizvoda;
- istraživati karakterizaciju dobijenih šafl proizvoda zasnovanoj na teoriji uređenja, kao i njihove nerekurzivne opise.

Neophodno predznanje: Osnovni kursevi iz algebre, diskretne matematike i kombinatorike, kao i sposobnost čitanja matematičkih tekstova na engleskom jeziku. Predznanje iz teorije operada, Hopfovih algebri i geometrije politopa nije potrebno.

Relevantna literatura:

- 1 Jean-Louis Loday and María O. Ronco. “Hopf algebra of the planar binary trees”. English. In: Adv. Math. 139.2 (1998), pp. 293–309.
- 2 Emily Burgunder and María Ronco. “Tridendriform structure on combinatorial Hopf algebras.” English. In: J. Algebra 324.10 (2010), pp. 2860–2883.
- 3 Pierre-Louis Curien, Jovana Obradović, and Jelena Ivanović. “Syntactic aspects of hypergraph polytopes”. English. In: J. Homotopy Relat. Struct. 14.1 (2019), pp. 235–279.
- 4 Pierre-Louis Curien, Bérénice Delcroix-Oger, and Jovana Obradović. “Tridendriform algebras on hypergraph polytopes”. en. In: Algebraic Combinatorics 8.1 (2025), pp. 201–234.
- 5 Pierre-Louis Curien, Bérénice Delcroix-Oger, and Jovana Obradović. “Tridendriform algebras on hypergraph polytopes, the other way around”. preprint. arXiv:2606.17755. (2026).

6 Pierre-Louis Curien, Bérénice Delcroix-Oger, and Jovana Obradović. “Generalised flip order on the faces of nestohedra”. preprint. (2026).

Istraživanje iz funkcionalne analize

Mentori:

Bogdan Đorđević, bogdan.djordjevic@turing.mi.sanu.ac.rs

Nebojša Dinčić, nebojsa.dincic@pmf.edu.rs

Opis: Funkcionalna analiza zauzima centralni deo u matematičkoj analizi. Rezultati u ovoj oblasti matematike imaju duboke primene u suštinskom razumevanju procesa i problema koji se javljaju u diferencijalnim i parcijalnim diferencijalnim jednačinama, harmonijskoj analizi, numerici, stohastici, linearnoj algebri, matricnoj analizi, a od skora i u mašinskom učenju i neuronskim mrežama.

U okviru ove teme, istraživanje bi bilo prilagođeno kandidatu: uzeli bi se u obzir predznanje i afiniteti polaznika, i u skladu s tim bi se istraživala primena funkcionalne analize u nekim od gorepomenutih oblasti.

Neophodno predznanje: Osnovni kursevi iz algebre, linearne algebre, matricne analize, realne analize, kompleksne analize, teorije mera i integrala, funkcionalne analize i teorije operatora, kao i sposobnost čitanja matematičkih tekstova na engleskom jeziku.

Dubinska struktura slike

Mentor: Miloš Milovanović, milosm@turing.mi.sanu.ac.rs

Opis: Pod dubinskom strukturom se u obradi slike podrazumeva skalirajući parametar koji dodatno određuje signal dopunjavajući prostorne koordinate. Njegova uloga je da predstavi rezoluciju i ujedno dinamiku budući da uspostavlja svojstveno vreme sistema. Ova se struktura uporedo prati kod prostornih umetnosti poput slikarstva i arhitekture, kao i kod vremenskih kao što je muzika. Njeno razmatranje omogućava opštu definiciju vremena koja bi se odnosila na porast informacije, nezavisno od reprezentativnog medijuma.

Neophodno predznanje: Predznanje nije naročito neophodno, ali bi se odnosilo pre svega na diferencijalnu geometriju glatkih mnogostrukosti i obradu signala. Takođe je od koristi poznavanje nekog

od programskih jezika, po mogućstvu Matlab-a sa paketom (“toolbox”) za rad sa talasićima.

Relevantna literatura:

- 1 Florack, L. Image Structure; Springer, Heidelberg, 2010.
- 2 Milovanović, M. & Saulig, N. The Duality of Psychological and Intrinsic Time in Artworks, *Mathematics* 2024, 12(12), 1850.
- 3 Milovanović, M. & Tomić, B.M. Fractality and Self-organization in the Orthodox Iconography, *Complexity* 2016, 21(S1), 55—68.

Kvantna teorija verovatnoće

Mentori:

Miloš Milovanović, milosm@turing.mi.sanu.ac.rs

Borivoje Dakić

Opis: Uporedo sa klasičnom verovatnoćom koju je ustanovio Andrej Kolmogorov, javila se kvantna teorija u delu Džona fon Nojmana. Njihov odnos predstavlja suprotnost ekstenzionalnog stanovišta zasnovanog na klasičnoj logici skupova i intenzionalnog koji se odnosi na svojstva prikazana ortoprojektorima. Cilj istraživanja je da se ovaj pristup razvije u doslednu teoriju koja bi bila pandan klasičnoj i po mogućstvu je obuhvatila.

Neophodno predznanje: Potrebno je poznavanje verovatnoće bar na nivou Matematičke gimnazije. Elementarno poznavanje kvantne fizike bi takođe bilo poželjno. Podrazumeva se poznavanje matematičke analize i geometrije na osnovnom nivou.

Relevantna literatura:

- 1 Khrennikov, A. Probability and Randomness: Quantum versus Classical, Imperial College Press, 2016.
- 2 Milovanović, M. & Saulig, N. An Intensional Probability Theory: Investigating the Link between Classical and Quantum Probabilities, *Mathematics* 2022, 10(22), 4294.
- 3 Pitowsky, I. Quantum Probability — Quantum Logic, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

- 4 Wojciechowski, B.W. Quantum Probability Theory, Psychology and Law: Modelling Legal Decision Making with Quantum Principles, Routledge, London, 2023.

Problem crne kutije u obrazloženju formalnih odluka

Mentori:

Velimir Ilić, velimir.ilic@turing.mi.sanu.ac.rs

Anđelka Zečević, andjelkaz@mi.sanu.ac.rs

Opis: Primena veštačke inteligencije u sistemima koji zahtevaju obrazloženje formalnih odluka, kao što su pravosuđe i bankarstvo, suov cava pravnu teoriju sa izazovom poznatim kao problem crne kutije. Ova tema se bavi odnosom između tehničke neprozirnosti savremenih algoritama mašinskog učenja i pravnog zahteva da svaka odluka sa pravnim dejstvom mora biti transparentna i obrazložena. Cilj istraživanja je uspostavljanje algoritamskih i pravnih pristupa u cilju obezbeđivanja transparentnosti, odgovornosti i pravne sigurnosti za tretiranje problema crne kutije.

Neophodno predznanje: Veštačka inteligencija, neuronske mreže, veliki jezički modeli. Pravne nauke.

Relevantna literatura:

- 1 Russell, S., & Norvig, P. (2020). Artificial Intelligence: A Modern Approach (4th ed.). Pearson.
- 2 Lipton, Z. C. (2018). The mythos of model interpretability. *Communications of the ACM*, 61(10), 36–43. <https://doi.org/10.1145/3233231>
- 3 Wachter, S., Mittelstadt, B., & Russell, C. (2017). Counterfactual explanations without opening the black box: Automated decisions and the GDPR. *Harvard Journal of Law & Technology*, 31(2), 841–887.
- 4 Rudin, C. (2019). Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead. *Nature Machine Intelligence*, 1(5), 206–215. <https://doi.org/10.1038/s42256-019-0048-x>